**3.3. Carthesian Product**

**Definisi 3.3.1.** Jika A dan B himpunan *yang tidak kosong*, maka Carthesian Product dari A dan B dilambangkan dengan A x B adalah himpunan ***pasangan urut*** (a,b) dengan a ∈ A dan b ∈ B.

Secara simbolik: **A x B = {(a,b) | a ∈ A ∧ b ∈ B}**

***Contoh:***

a. Jika A = {a,b} dan B = {p, q, r}, maka

A x B = {(a,p), (a,q), (a,r), (b,p), (b,q), (b,r)}.

B x A = {(p,a), (p,b), (q,a), (q,b), (r,a), (r,b)}.

b. Jika P = {a,b,c} dan Q = {1,2,3}, maka

P x Q = {(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3), (c,1), (c,2), (c,3)}

Q x P = {(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c), (3,a), (3,b), (3,c)}

Kesimpulan: **A x B ≠ B x A dan P x Q ≠ Q x P**

**3.4. Relasi**

**Definisi 3.4.1.** Diberikan dua himpunan A ≠ φ dan B ≠ φ, suatu relasi R dari A ke B adalah himpunan *pasangan urut* yang elemen-elemen pertama dari setiap pasangan urutnya berasal dari elemen A dan elemen-elemen kedua dari setiap pasangan urutnya berasal dari elemen B yang merupakan **himpunan bagian** dari

A x B. Jika A = B, maka suatu relasi R pada A x A disebut **relasi dalam** A.

Secara simbolik: R = {(a,b) | a ∈ A ∧ b ∈ B} ⊆ A x B

**Definisi 3.4.2.** Jika R ⊆ A x B adalah suatu relasi pada himpunan A x B, maka himpunan semua elemen pertama dalam pasangan urut (a,b) ∈ R disebut *daerah definisi* (daerah asal/domain) dari relasi R dan himpunan semua elemen kedua dalam pasangan urut (a,b) ∈ R disebut *daerah nilai* (daerah hasil/jelajah/range)

dari relasi R. Daerah definisi dari relasi R dilambangkan dengan D(R) , dan daerah hasil dari relasi R dilambangkan dengan R(R). Daerah definisi dan daerah hasil dari relasi R, secara simbolik dinyatakan sebagai berikut

D(R) = {a ∈ A | (a,b) ∈ R, R relasi pada A x B}

R(R) = {b ∈ B | (a,b) ∈ R, R relasi pada A x B}

***Contoh :***

1. Misal A = {1,2,3} dan B = {a,b}, maka

R = {(1,a), (2,b), (3,a), (3,b) } merupakan suatu relasi karena R ⊆ A x B.

Pada relasi ini (1,b) ∊ R dan (2,a) ∊ R.

D(R) = {1,2,3} dan R(R) = {a,b}

2. Misal W = {1,2,3}, maka

R = {(1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (3,3)} merupakan **relasi dalam** W.

Pada relasi ini (1,3) ∊ R, (2,2) ∊ R, (3,1) ∊ R dan (3,2) ∊ R.

D(R) = {1,2,3} dan R(R) = {1,2,3}

3. R = {(x,y) | ( x, y ∈ R, y < x } merupakan relasi dalam R.

D(R) = {x | x ∈ R} dan R(R) = {y | y < x , x ∈ R}

4. Diberikan A = {1,2,3,4} dan B = {3,4,5,6,7}, R suatu relasi dari A ke B

yang didefinisikan sebagai berikut

(a,b) ∈ R (**3a < b**, a ∈ A dan b ∈ B).

Tentukan daerah definisi dan daerah hasil/nilai dari R.

Penyelesaian:

R = {(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(2,7)}

D(R) = {1,2} dan R(R) = {4,5,6,7}

***Inversi suatu Relasi***

**Definisi**  **3.4.3.** Setiap relasi R dari A ke B mempunyai suatu inversi (R-1) dari B ke A yang didefinisikan dengan

(R-1) = {(b,a) | (a,b) ∈ R}.

Contoh:

1. Diberikan A = {1,2,3} dan B = {a,b} dan R = {(1,a), (2,b), (3,a)} merupakan relasi dalam A x B, maka

R -1 = {(a,1), (b,2), (a,3)}

1. Diberikan W = {a,b,c} dan R = {(a,a), (a,b), (b,b), (c,b), (c,c)}adalah relasi dalam W, maka

R-1 = {(a,a), (b,a), (b,b), (b,c), (c,c)}

**Relasi Refleksif**

***Definisi 3.4.4.*** Misal R adalah suatu relasi dalam A (R ⊆ A x A). Relasi R disebut relasi refleksif, jika ***untuk setiap a elemen A*** berlaku (a,a) ∈ R.

***Contoh :***

1. Misal V = {1,2,3,4} dan

R = {(1,1), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (3,4),(4,4)}

Relasi R disebut refleksif, karena setiap (a,a) ∈ R.

2. Misal T adalah himpunan segitiga-segitiga pada bidang Euclides.

Relasi R dalam T didefinisikan dengan kalimat terbuka "x sebangun dengan

y". Relasi R ini jelas merupakan relasi refleksif, karena setiap segitiga

dalam T sebangun dengan dirinya sendiri.

1. Misal R adalah suatu relasi dalam bilangan real **R** yang didefinisikan

dengan kalimat terbuka " x < y".

Relasi ini **bukan relasi refleksif**, karena setiap bilangan real x tidak akan

kurang dari atas dirinya.

1. Misal A adalah power set dari himpunan A. R suatu relasi dalam A yang

didefinisikan dengan "x subset dari y". Relasi R adalah relasi refleksif arena setiap himpunan dalam A merupakan subset atas dirinya sendiri.

**Relasi Simetrik**

***Definisi 3.4.5.*** Misal R adalah suatu relasi dalam A (R ⊆ A x A). Relasi R disebut relasi simetrik, jika (a,b) ∈ R mengakibatkan (b,a) ∈ R *berarti* jika a direlasikan dengan b, maka b juga direlasikan dengan a.

***Contoh :***

1. Misal S = {1,2,3,4} dan

R = {(1,1), (1,2), (2,1), (2,4), (3,3), (4,2)} adalah relasi simetrik,

karena setiap a direlasikan dengan b, maka b juga direlasikan dengan a.

2. Misal T adalah himpunan segitiga-segitiga pada bidang Euclides.

Relasi R dalam T didefinisikan dengan kalimat terbuka "x kongruen dengan

y". Relasi R ini jelas merupakan relasi simetrik, karena setiap segitiga dalam

T kongruen dengan dirinya sendiri.

3. Misal R adalah relasi dalam bilangan asli A, yang didefinisikan dengan "x

pembagi y".

Relasi R ini *bukan simetrik*, karena x yang membagi y belum tentu y

pembagi x. Misal (2,4 ) ∈ R tetapi (4,2) ∉ R.

***Akibat:*** Karena (a,b) ∈ R mengakibatkan (b,a) ∈ R , maka R adalah relasi simetrik jika dan hanya jika R = R

**Relasi Anti Simetrik**

***Definisi 3.4.6.*** Misal R adalah suatu relasi dalam A (R ⊆ (A x A). Relasi R disebut relasi anti simetrik, jika (a,b) ∈ R dan (b,a) ∈ R mengakibatkan a = b.

Contoh :

1. Misal R adalah relasi dalam bilangan asli A, yang didefinisikan dengan "x pembagi y". relasi ini adalah relasi anti simetri, karena a pembagi b dan b pembagi a mengakibatkan a = b.
2. Misal A adalah power set dari himpunan A. R suatu relasi dalam A yang didefinisikan dengan "x subset dari y". Relasi R adalah relasi anti simetrik, karena x ⊂ y dan y ⊂ x mengakibatkan x = y.
3. Misal W = {1,2,3,4} dan R = {(1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)} bukan relasi anti simetrik, walaupun (1,2) ∊ R dan (2,1) ∊ R secara fakta 1 ≠ 2.

**Relasi Transitif**

Definisi 3.4.7. Suatu relasi R dalam himpunan A disebut relasi transitif, jika (a,b) ∈ R dan (b,c) ∈ R, maka (a,c) ∈ R.

Dengan kata lain, jika a direlasikan dengan b dan b direlasikan dengan c, maka a direlasikan dengan c.

Contoh :

1. Misal R adalah relasi dalam **R**, yang didefinisikan dengan "x > y ".

Sebagaimana definisi di atas x > y dan y > z mengakibatkan x > z.

Jadi, R adalah relasi transitif.

2. Misal W = {a,b,c} dan R = {(a,a), (a,b), (a,c), (b,c), (c,a), (b,a), (c,b),(b.b),

(c,c)}.

R adalah relasi transitif, karena (a,b) ∈ R dan (b,c) ∈ R maka (a,c) ∈ R.

Demikian halnya, (a,c) ∈ R dan (c,a) ∈ R maka (a,a) ∈ R.

1. Misal A adalah power set dari himpunan A. R suatu relasi dalam A yang didefinisikan dengan "x subset dari y". Relasi R adalah relasi transitif, karena x ⊂ y dan y ⊂ z, maka x ⊂ z.
2. Misal M adalah himpunan mahasiswa Universitas Muhammadiyah Surabaya dan R adalah relasi yang didefinisikan dengan "x mencintai y".

R **bukan relasi transitif,** karena x mencintai y dan y mencintai z belum

tentu x mencitai z.

**Relasi Ekivalensi**

Definisi 3.4.8. Suatu relasi R dalam himpunan A merupakan relasi ekivalensi, jika memenuhi tiga syarat berikut

i. R adalah relasi refleksif, yaitu a ∈ A berlaku (a,a) ∈ R,

ii. R adalah relasi simetrik, yaitu (a,b) ∈ R, maka (b,a) ∈ R,

iii. R adalah relasi transitif, yaitu (a,b) ∈ R, (b,c) ∈ R, maka (a,c) ∈ R

Contoh :

1. Misal T adalah himpunan segitiga-segitiga pada bidang Euclides. Relasi R

dalam T didefinisikan dengan kalimat terbuka "x sebangun dengan y". Relasi R ini jelas merupakan relasi refleksif, simetrik dan transitif.

Jadi, R adalah relasi ekivalensi. Segitiga dalam T sebangun dengan dirinya

sendiri.

1. Misal A adalah power set dari himpunan A. R suatu relasi dalam A yang didefinisikan dengan "x = y".

Relasi R adalah relasi refleksif, simetrik dan transitif. Jadi, R adalah relasi

ekivalensi.

**3.5. Fungsi**

Definisi 3.5.1. Jika A dan B adalah himpunan (tidak perlu keduanya berbeda) Suatu fungsi f dari A ke B adalah himpunan pasangan urut dalam A x B yang memenuhi sifat jika (a,b) dan (a, b') merupakan elemen-elemen dari f, maka b = b'.

*Secara simbolik* : f : {(a,b) ∈ A x B ⏐ (a, b ), (a, b’ ) ∈ f ⇒ b = b’ .

Himpunan elemen-elemen dari A yang merupakan elemen-elemen pertama pada pasangan urut dalam f disebut Domain dari f dan dilambangkan dengan D(f) .

Himpunan elemen-elemen dari B yang merupakan elemen-elemen kedua pada pasangan urut dalam f disebut Range dari f dan dilambangkan dengan R(f).

Jika (a,b) ∈ f, maka b = f(a) atau f : a ⇒ b.

***Contoh:***

1. Misal W = {1,2,3,4}. Perhatikan relasi-relasi berikut

R1 = {(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)}

R2 = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)}

R3 = {(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)}

R4 = {(1,2), (3,4), (4,1)}

R5 = {(2,1), (2,3), (3,1), (4,4)}

Nyatakan apakah relasi-relasi di atas merupakan fungsi?

Penyelesaian:

Suatu relasi R dalam W merupakan fungsi jika dan hanya jika ∀a ∈ W

muncul sekali dan hanya sekali sebagai elemen pertama dalam pasangan

urut (a, R (a)). Berdasar kriteria ini, maka

1. R merupakan fungsi, karena ∀x ∈ W muncul sekali sebagai elemen

pertama dalam pasangan urut R.

b. R bukan fungsi, karena 1 ∈ W muncul lebih dari satu kali sebagai

elemen pertama pada himpunan pasangan pasangan urut dalam R .

c. R merupakan fungsi. (Why?)

d. R merupakan fungsi. (Why?)

e. R bukan fungsi, karena 2 ∈ W muncul lebih dari satu kali sebagai elemen

pertama pada himpunan pasangan pasangan urut dalam R .

1. Misal A = {Ibukota Negara-negara Asean} dan B = {Negera-negara

Asean}

Relasi f dari A ke B yang didefinisikan dengan " X ibukota negara Y",relasi

f jelas merupakan fungsi sebab tidak mungkin Ibukota Negara dimiliki lebih

dari satu negara dan tidak mungkin Ibukota Negara tidak memiliki Negara.

3. Misal A = {1,2,3,4,5} dan B = {1,3,5,7,9}. Misal g suatu relasi dari A ke B

yang didefinisikan dengan "a banyaknya faktor dari b". Relasi ini bukan fungsi, karena 4 ∈ A dan 5 ∈ A tidak mempunyai pasangan dengan anggota B dan 2 ∈ A mucul lebih dari satu kali sebagai elemen pertama dari g

g = {(1,1),(2,3),(2,5),(2,7),(3,9)}).

1. Misal h adalah relasi dalam A yang didefinisikan dengan "x dikawankan

dengan x ". Relasi h adalah fungsi (why?).

**Macam-macam Fungsi**

Dari cari peninjauannya, terdapat bermacam-macam fungsi.

Ditinjau dari banyaknya peubah bebas yang berhubungan dengan peubah

tak bebas , fungsi dibedakan atas:

1. ***Fungsi dengan satu peubah bebas***, jika nilai peubah tak bebas y = f(x)***,*** hanya tergantung pada nilai peubah bebas x yang mungkin.

Secara simbolik dinyatakan dengan: y = f(x).

Contoh: a. f(x) = x – 3

b. f(x) = x2 + 2x + 2

c. f(x) = 3x3 + 2x2 + x - 10

1. ***Fungsi dengan dua peubah bebas,*** jika nilai peubah tak bebas z = f(x,y)***,*** tergantung pada tiap nilai dari dua peubah bebas x dan y yang mungkin.

Secara simbolik dinyatakan dengan: z = f(x,y).

Contoh: a. z = x2 + y2 – 25

b. z = x2 - y2 – 16

c. z = x2 + y2 + 2x – 4y – 20.

***3***. ***Fungsi dengan tiga peubahbebas,*** jika nilai peubah tak bebas w = f(x,y,z),

tergantung pada tiap nilai dari tiga peubah bebas x, y dan z yang mungkin.

Secara simbolik dinyatakan dengan: w = f(x,y,z).

Contoh: a. w = x + y – 3yz + 10

b. w = 2xy +

II. Ditinjau dari ***penyajian rumus fungsinya***  fungsi terbagi atas:

1. ***Fungsi eksplisit***, yaitu jika peubah-peubah x dan y dalam ruas yang

berbeda (biasanya y di ruas kiri dan x di ruas kanan) dan dilambangkan dengan y = f(x).

Contoh: a. y = x2 - x + 3

b. y = g(log x +2)

c. y = 3x3 + x2 + 5x + 10

***2.Fungsi implisit***, yaitu jika peubah-peubah x dan y dalam ruas yang sama

dan dilambangkan dengan f(x,y) = 0.

Contoh : a. x2y - 3xy2 + 2 = 0

b. xy - 9 = 0

c. 4x2 + 9y2 – 36 = 0

***3. Fungsi Parameter***. jika hubungan peubah-peubah x dan y dinyatakan oleh

fungsi-fungsi dengan peubah lain yang disebut parameter dan

dilambangkan dengan x = f(t) dan y = g(t), t sebagai parameter.

Contoh. x = 2t dan y = 4t + 1

x = 2t ⇔ t = 1/2 x

⇔ y = 4.(1/2 x) + 1

⇔ y = 2x + 1

III. Ditinjau atas objek/materi***,*** fungsi terdiri atas:

1. ***Fungsi aljabar.***  Suatu fungsi f disebut fungsi aljabar, jika rumus fungsi

dioperasikan dengan operasi-operasi aljabaryaitu penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian atau penarikan akar dari peubah bebasnya.

Fungsi aljabar yang menggunakan penarikan akar pada peubah bebasnya

disebut ***fungsi irasional.***

Contoh : f(x) = 2x2 - ; ∀x ≥ 0, x ∈ **R**

g(x) = ; ∀x ≥ 0, x ∈ **R**

h(x) = ; ∀x ≥ 0, x ∈ **R**

Fungsi aljabar yang tidak menggunakan penarikan tanda akar pada peubah bebasnya disebut ***fungsi rasional.*** Fungsi rasional terdiri atas fungsi rasional bulat dan fungsi rasional pecah. Fungsi **rasional bulat** disebut juga fungsi polinom. Secara umum fungsi polinom dinyatakan dalam bentuk

f(x) = a0xn + a1xn-1 + a2xn-2 + … + an-1x + an ;  a0 ≠ 0 dan n ∈ **A** , n merupakan derajat dari polinom tersebut.

Contoh : f(x) = x2 - 3x + 4 adalah polinom berderajat dua

g(x) = 2x3 + 4 x2 + 3x - 10 adalah polinom berderajat tiga.

Fungsi **rasional pecah** adalah fungsi yang merupakan hasil bagi dari dua bentuk polinom.

Contoh : h(x) =

***2. Fungsi transendal:***

Suatu fungsi f dikatakan fungsi transendal bila fungsi f bukan fungsi aljabar. Fungsi-fungsi transendal antara lain:

1. ***fungsi pangkat***

Contoh : y = xa dengan a bilangan irasional

***b. fungsi eksponen***

Contoh: f(x) = 2ex

***c. fungsi logaritma***

Contoh f(x) = 2x3 + log x

***d. fungsi trigonometri***

Contoh f(x) = sin 2x

***e. fungsi hiperbolik***

Contoh f(x) = cosh 3x

***f. fungsi siklometri***

Contoh f(x) = arc tan x

IV. Ditinjau dari ***kesamaan nilai fungsinya***, fungsi terdiri atas:

***1. Fungsi genap***

Misal f suatu fungsi dengan daerah asal D(f), dikatakan fungsi genap, jika

∀x ∈ D(f) berlaku f(-x) = f(x)

Contoh: f(x) = x4 + 3 x2

g(x) = x2 - 2 cos x

***2. Fungsi ganjil***

Misal g suatu fungsi dengan daerah asal D(g) , dikatakan fungsi ganjil, jika

∀x ∈ D(g) berlaku f(-x) = - f(x)

Contoh : f(x) = 2x + 3 sin x

g(x) = 3x + 2tan x

h(x) = x3 + x

***3. Fungsi periodik.***

Misal f suatu fungsi dengan daerah asal D(f) , dikatakan fungsi periodik,

jika ∀x ∈ D(f) ∃p ∈ D(f) sehingga f(x + p) = f(x)

Contoh: f(x) = sin x adalah fungsi periodik dengan periode p = 2kπ, k ∈ **B**

f(x) = sin x ⇔ f(x + 2π) = sin x, untuk k = 1

g(x) = cos x adalah fungsi periodik dengan periode p = 2kπ, k ∈ **B**

g(x) = cos x ⇔ f(x + 4π) = cos x, untuk k = 2

h(x) = tan (x) adalah fungsi periodik dengan periode p = kπ, k ∈ **B**

h(x) = tan x ⇔ f(x + 3π) = tan x, untuk k = 3

**V**. Ditinjau dari ***domain/daerah asal*** fungsi terbagi atas ***fungsi restriksi*** dan

***fungsi extensi.***

Jika f suatu fungsi dengan domain D(f) dan D(f1) ⊆ D(f) merupakan domain dari fungsi baru f1 dan f1 (x) = f(x) ∀x ∈ D(f1) , maka f1 disebut fungsi ***restriksi*** domain D(f) dipersempit menjadi D(f1) .

Secara simbolik : f1 : = {(a,b) ∈ f | a ∈ D(f1)}

Jika g suatu fungsi dengan domain D(g) dan D(g2) ⊇ D(g) merupakan domain dari fungsi baru g2 dan g2 (x) = g(x) ∀x ∈ D(g2), maka g2 disebut fungsi ***extensi*** domain D(g2) merupakan perluasan dari domain D(g) .

Secara simbolik : g2 : = {(a,b) ∈ g | a ∈ D(g2)}

**Fungsi Tersusun**

***Definisi 3.5.2***. Jika f adalah fungsi dengan domain D(f) pada A dan Range R(f) pada B dan g adalah fungsi dengan domain D(g) pada B dan Range R(g) pada C.

Perhatikan gambar berikut

A B C

f g

D(g)

R(g)

Komposisi g o f adalah fungsi dari A ke C, yang didefinisikan dengan

g o f = {(a,c) ∈ A x C | ∃ b ∈ B ∍ (a,b) ∈ f ∧ (b,c) ∈ g}.

Jika f dan g adalah fungsi dan x ∈ D(f), maka pada pasangan urut pada g

ditentukan oleh elemen f(x) dan f(x)∈ D(g). Dengan demikian jelas bahwa

Domain dari g o f (D(gof)) = {x ∈ D(f) | f(x) ∈ D(g)}.

Untuk x ∈ (D(gof)), maka nilai g o f pada x ditentukan dengan (g o f)(x) =

g(f(x)).

Sedangkan Range dari g o f adalah himpunan (R(gof)) = { g(f(x)) | x ∈

D(gof)}.

***Contoh :***

1. Misal fungsi-fungsi f : **R** ↦ **R** dan g : **R** ↦ **R** yang didefinisikan

dengan f(x) = x + 1 dan g(x) = x2 . Tentukan suatu rumus yang

mendefinisikan g o f dan f o g.

Penyelesaian:

Sebelum menyelesaikan soal ini terlebih dahulu fahami bahwa g o f berarti

fungsi f dilanjutkan dengan fungsi g, sedangkan f o g berarti fungsi g

dilanjutkan dengan fungsi f.

Dengan menggunakan definisi di atas maka

g o f = g(f(x))

= g(x + 1)

= (x + 1)2 atau

= x2 + 2x + 1, sedangkan

f o g = f(g(x))

= f(x )

= x + 1

Ternyata g o f ≠ f o g.

2. Misal f dan g adalah fungsi dalam R yang didefinisikan dengan

f(x) = x2 + 2x - 3 dan g(x) = 3x - 4.

a. Tentukan rumus fungsi dari g o f dan f o g.

b. Selidiki apakah (g o f)(2) = g(f(2)) dan (f o g)(2) = f(g(2)).

Penyelesaian:

a. g o f = g(f(x))

= g(x2 + 2x - 3)

= 3(x2 + 2x - 3) - 4

= 3x2 + 6x - 13

f o g = f(g(x))

= f(3x - 4)

= (3x - 4)2 + 2(3x - 4) - 3

= 9x2 - 24 x + 16 + 6x - 8 - 3

= 9x2 - 18x + 5

g o f(2) = 3.22 + 6.2 - 13

= 12 + 12 - 13

= 11

g(f(2)) = g(2 + 2.2 - 3)

= g(5)

= 3.5 - 4

= 11

Jadi, g o f(2) = g(f(2))

***Definisi 3.5.4.*** Jika f adalah fungsi dengan domain D(f) pada A dan Range R(f) pada B, f dikatakan fungsi *injektif atau satu-satu* jika (a,b) dan (a',b) elemen dari f, maka a = a'.

Jika f fungsi injektif disebut juga f adalah injeksi.

Dengan kata lain f adalah fungsi *injektif* jika dan hanya jika dua relasi f(a) = b dan

f(a') = b, maka a = a'.

Alternatif yang lain, f adalah fungsi *injektif* jika dan hanya

jika a, a' elemen D(f) dan a ≠ a', maka f(a) ≠ f(a').

***Contoh :***

1. Misal A = {2,4,6,8} dan B ={1,2,3,4}. Misal f suatu fungsi dari A ke B yang didefinisikan dengan "a dua kali b". Fungsi f ini adalah fungsi injektif, Karena 2 ∈ A dan 4 ∈ A ( 2 ≠ 4) berpasangan dengan 1 ∈ B dan 2 ∈ B ( 1 ≠ 2) (dua elemen berbeda di A berpasangan dengan dua elemen berbeda di B).
2. Misal f : **A** ↦ **A** yang didefisikan dengan rumus f(x) = x2 . Fungsi f adalah fungsi satu-satu/injektif sebab dua elemen berbeda di **A** daerah domain berpasangan dengan dua elemen berbeda di daerah jelajah **A**.
3. Misal f : **R** ↦ **R** yang didefisikan dengan rumus f(x) = x2 . Fungsi f

bukan fungsi satu-satu/injektif (why?).

1. Misal f : **R** ↦ **R** yang didefisikan dengan rumus f(x) = x3 . Fungsi f adalah fungsi satu-satu/injektif (why?).

***Definisi 3.5.5.*** Jika f adalah injeksi dengan domain D(f) pada A dan Range R(f) pada B. Dibangun fungsi g = {(b,a) ∈ B x A | (a,b) ∈ f } dan g juga injeksi dengan domain D(g) = R(f) pada B dan Range R(g) = D(f) pada A.

Fungsi g disebut fungsi *inversi* dari f dan dilambangkan dengan f(-1).

***Contoh :***

1. Misal f : ℝ → ℝ adalah fungsi yang didefinisikan dengan f(x) = 2x - 3. Tentukan rumus fungsi inversi f(-1).

Penyelesaian:

Relasi f adalah fungsi injektif (why?)

Tinggal menunjukkan f (-1) apakah juga injektif!

Untuk menentukan rumus f(-1) ditempuh langkah-langkah sebagai berikut

Misal y adalah bayangan dari x atas fungsi f, sehingga

y = f(x) = 2x - 3 i)

Akibatnya, x merupakan bayangan dari y atas fungsi f(-1), yaitu

x = f (-1)(y) ii)

Dari pers. i), ditentukan x dalam y diperoleh

x = 

Berdasar pers. ii), diperoleh

f -1(y) = 

Rumus fungsi f-1(y) =  ini dapat diubah dalam bentuk

f-1(x) =  dengan x ∈ R(f)0 = D(f-1)

Jika f-1 ini merupakan fungsi injektif, maka f-1 merupakan fungsi inversi dari

f.

Dari rumus fungsi f-1(x) =  , jelas f-1merupakan fungsi injektif (why?).

Dengan demikian, f-1(x) =  merupakan rumus fungsi inversi dari f.

2. Misal f : **A** → **A** yang didefinisikan dengan f(x) = x2. Tentukan rumus fungsi

inversi f-1 .

***Penyelesaian:***

Relasi f adalah fungsi injektif (why?)

Tinggal menunjukkan f-1 apakah juga injektif!

Untuk menentukan rumus f-1 ditempuh langkah-langkah sebagai berikut

Misal y adalah bayangan dari x atas fungsi f, sehingga

y = f(x) = x2  i)

Akibatnya, x merupakan bayangan dari y atas fungsi f(-1), yaitu

x = f (-1)(y) ii)

Dari pers. i), ditentukan x dalam y dan diperoleh

x =

Berdasar pers. ii) bentuk ini (x = ) diubah menjadi

f (-1)(y) = bentuk ini dapat diubah menjadi

f(-1)(x) = dengan x ∈ R(f) = D(f (- 1))

Relasi f (-1) jelas fungsi injektif (why?).

Jadi, rumus fungsi inversi dari f yang diminta adalah f(-`1)(x) =

***Definisi 2.5.7.***  Jika f adalah fungsi dengan domain D(f) ⊆ A dan Range R(f) ⊆ B, f dikatakan fungsi surjektif atau memetakan A onto B bila R(f) = B.

Jika f fungsi surjektif, dapat dikatakan f *surjeksi*.

***Contoh :***

1. Misal P = {Penduduk kota Surabaya} dan U = {ukuran sepatu}

Misal f adalah fungsi yang didefinisikan "p ukuran sepatunya adalah u".

Fungsi f merupakan fungsi surjektif, karena setiap penduduk kota Surabaya

mempunyai satu ukuran sepatu dan semua ukuran sepatu berpasangan

dengan semua penduduk kota Surabaya.

2. Misal A = [-1,1]. Misal g adalah fungsi dalam A yang didefinisikan dengan

g(x) = x3.

Jelas g adalah fungsi surjektif/onto, karena g(A) = A.

1. Misal B = [-1,1]. Misal h adalah fungsi dalam B yang didefinisikan dengan

h(x) = x2 .

Jelas h bukan fungsi surjektif, karena tidak terdapat elemen-elemen negatif dalam B yang muncul sebagai range dari h.

***Definisi 3.5.8.*** Fungsi f dengan domain D(f) ⊆ A dan Range R (f) ⊆ B dikatakan fungsi bijektif bila fungsi f

1. injektif dan

2. surjektif.

Jika f fungsi bijektif, dapat dikatakan f bijeksi.

***Contoh :***

1. Misal f : **R** → **R** adalah fungsi yang didefinisikan dengan f(x) = x.

Jelas f adalah fungsi injektif dan surjektif, karena setiap elemen

dipasangkan atas dirinya sendiri.

2. Misal A = {Negara-negara Asean} dan B = {Ibukota negara-negara Asean}

Jika relasi f didefinisikan dengan "a beribukota b", maka relasi f adalah

fungsi bijektif, karena setiap negara mempunyai satu ibukota negara dan

tidak mungkin satu negara mempunyai lebih dari satu ibukota negara.

***Definisi 3.5.9.*** Jika E ⊆ A, maka bayangan langsung (direct image) atas f adalah f(E) ⊆ B dan ditunjukkan dengan

f(E) = { f(x) | x ∈ E }.

Jika H ⊆ B, maka bayangan inversi atas f dari H adalah

f (-1)(H) ⊆ A dan ditunjukkan dengan

f(-1)(H) = { x | f(x) ∈ H }

***Contoh :***

Jika f : E ⊆ **R** ditentukan dengan E = {x | -1 < x < 2}, maka direct image dari E dalam f yaitu f(E) = {y | 1 < y < 10}.

Misal y = f(x), maka y = 3x + 4

⇔ 3x = y - 4

⇔ x =  atau

⇔ f1(x) = 

Jika ditetapkan H ⊆ **R** (codomain) yaitu H = {y | -2 ≤ y ≤ 7 }, maka didapat

f(-1) (H) = { x | -2 ≤ x ≤ 1 }

**L A T I H A N 3. 2**

1. Misal R relasi dalam **A**, yang didefinisikan dengan “2x + y= 10”. Tentukan

1. Domain dari R,
2. Range dari R ,
3. R.

2. Misal R relasi dalam **R**, yang didefinisikan dengan “x + y= 16”. Tentukan

1. Domain dari R,
2. Range dari R ,
3. R

3. R suatu relasi dalam **R**, nyatakan suatu syarat agar R **bukan relasi refleksif**

4. Misal W = {1,2,3,4} dan

R = {(l,l ), (1,2), (2,1), (2,3), (3,3),(3,4),(4,4)}

Apakah R refleksif? Jelaskan.

5. Berikut diberikan kalimat terbuka yang mendefinisikan relasi R dalam bilangan

asli **A**.

Apakah relasinya refleksif?

1. “x kurang dari atau sama dengan y”
2. “x membagi y”
3. “x + y = l0”

6. R suatu relasi dalam **R**, nyatakan suatu syarat agar R bukan relasi simetris.

7. Misal V={1,2,3,4} dan R= {(l,l), (1,2), (2,1), (3,3), (4,4)}

Apakah R simetris? Jelaskan.

8. Berikut diberikan kalimat terbuka yang mendefinisikan relasi R dalam bilangan

asli **A**. Apakah relasinya simetris?

a. "x kurang dari atau sama dengan y"

b. "x membagi y"

c. "x + y = 10”

9. R suatu relasi dalam **R**, nyatakan suatu syarat agar R **bukan relasi anti simetris**.

10. Berikut diberikan kalimat terbuka yang mendefinisikan relasi R dalam bilangan asli **A**. Apakah relasinya anti simetris?

1. “x kurang dari atau sama dengan y”
2. “x membagi y”
3. “ x + y = 10”

11. Misal f(x) = x2 dan terdefinisi pada [-2,8]

Tentukan a. f(4) , b. f(-3) , c. f(-2)

12. Misal f: **R→ R** dan didefinisikan sebagai berikut

f(x)= , tentukan

a. f(1/2) , b. f(π) , c. f(2,1313...) , d. f(√2)

13. Misal A-= {a,b,c,d} dan B={0, 1}. Berapa banyak fungsi yang terjadi pada relasi dari A ke B. Tunjukkan.

14. Misal A=[-1,l], B =[1,3] dan C = [-3,-1]. Misal fungsi-fungsi

f: A→ **R**, f: B → **R** , f : C → **R** yang didefinisikan dengan "tiap-tiap bilangan

dipasangkan dengan kuadratnya". Diantara ketiga fungsi tersebut mana yang

tergolong fungsi injektif.

15. Misal A =[-1,l], B=[1,3] dan C =[-3,-1]. Misal fungsi-fungsi

f: A→ **R**, f: B → **R** , f : C → **R** yang didefinisikan dengan "tiap-tiap bilangan dipasangkan dengan pangkat tiganya". Diantara ketiga fungsi tersebut mana yang tergolong fungsi injektif

16. Tentukan D(f), dari f(x) = x2 agar fungsi ini merupakan fiingsi injektif.

17. Berikan suatu syarat agar fungsi konstanta merupakan fungsi injektif?

18. Dari soal 17. adakah fungsi-fungsi di atas merupakan fungsi injektif?

19. Misal f : A → B adalah fungsi. Tentukan f(A) agar f merupakan fungsi surjektif.

20. Misal A=[-1,1] fungsi f,g dan h dalam A didefenisikan

sebagai berikut:

a. f(x) = x2 b. g(x) = x3 c. h(x) = x5

Dari ketiga fungsi ini, mana yang tergolong fungsi surjektif?

1. Tentukan suatu syarat agar fungsi konstanta merupakan fungsi surjektif.
2. Misal f(a) = a, jika f fungsi dalam R apakah f fungsi surjektif?
3. Misal A = {1,2,3,4,5} dan fungsi-fungsi f: A → A dan g: A → A

yang difenisikan sebagai berikut:

f(1)=3, f(2)=5, f(3)=3, f(4)=1, f(5)=2

g(1) = 4, g(2) = 5, g(3) = 3, g(4) = 1, g(5) = 2

Tentukan g o f dan f o g.

1. Jika f: A → B dan g: B → C adalah fungsi-fungsi surjektif, tunjukkan bahwa

(g o f) : A→ C juga fungsi surjektif.

1. Misal f : A → B,g: B→ Cdan h:C→ D.

Buktikan bahwa (h o g) o f = h o(g o f).

1. Beri contoh dua fungsi f dan g yang memenuhi f o g= g o f.
2. Misal f dan g adalah fungsi yang memenuhi

gof(x)=x; ∀x ∈ D(f),

f o g(y) = y; ∀y ∈ D(g).

Tunjukkan bahwa g = f(-1)

1. Jika f fungsi injektif dari A ke B, tunjukkan bahwa f (-1) ={(b,a) ⎪(a,b ∈ f} juga fungsi.
2. Misal f: **R** → **R** yang didefinisikan dengan f(x) = x + 5. Tentukan suatu syarat agar fungsi f mempunyai fungsi inversi.
3. Misal A = **R**-{3} dan B = **R** - {1}. Misal fungsi f : A → B

yang didefinisikan dengan f(x) = 

Apakah f mempunyai fungsi inversi? Jelaskan.

1. Misal A=[1, +∞ ] dan B= [-4, + ∞ ]. Misal fungsi f: A → B yang didefinisikan dengan

f(x) = x2 - 2x - 3 Apakah f mempunyai fungsi inversi? Jelaskan.